ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Serie 12

1. Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung von einem halben Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

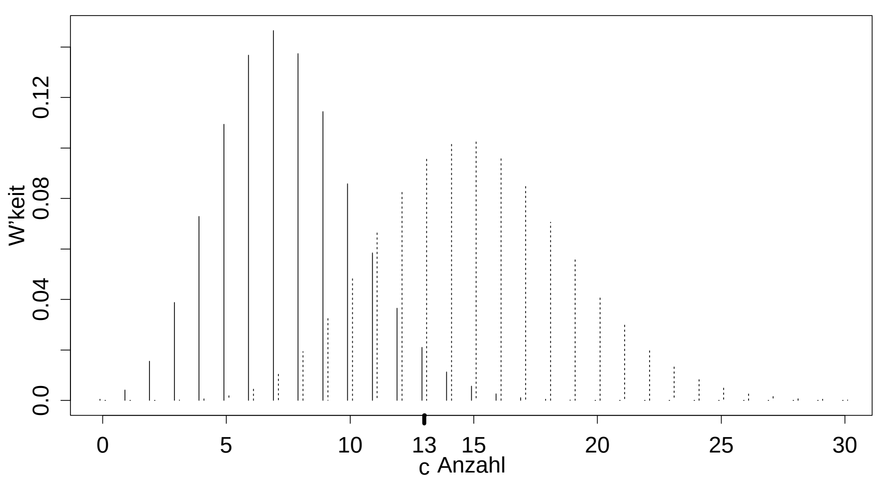
20.71 19.76 20.56 21.39 21.00 19.67 20.92 20.31 20.39 20.72.

Führe einen Vorzeichentest zum 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage richtig geeicht ist. Wie lautet der zugehörige P-Wert? Wie lautet der Testentscheid?

2. Wir bezeichnen mit X die Anzahl Asbestfasern in einem bestimmten Volumen und wählen eine Poisson-Verteilung $X \sim Pois(\lambda)$.

In der untenstehenden Abbildung ist die Verteilung von X für die Nullhypothese $\lambda_0 = 7.5$ respektive für die Alternativhypothese $\lambda = 15$ und die kritische Grenze $c = 13$ angegeben ($\alpha = 0.05$, einseitiger Test und c gehört zum Verwerfungsbereich).

a) Zeichne in diese Grafik den Verwerfungsbereich, die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art und des Fehlers 2. Art ein.



Bitte wenden!

b) Beurteile die folgenden Aussagen mit "richtig" oder "falsch". Gib eine kurze Begründung an.

1. Die Macht wird kleiner, wenn man das Niveau des Tests vergrössert.
2. Die Alternative mit $\lambda = 20$ hat einen grösseren Fehler 2. Art als die Alternative mit $\lambda = 15$.
3. Falls die kritische Grenze auf $c = 14$ erhöht wird, so wird die Macht kleiner.

3. Die Schmelzwärme von Wasser kann mit zwei Methoden gemessen werden. In verschiedenen Versuchen ergaben sich die folgenden Messwerte (in cal/g)

Methode 1: 12 Werte, $\overline{x} = 80.02$, $\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = 0.00691$.

Methode 2: 8 Werte, $\overline{y} = 79.98$, $\sum_{i=1}^{8}(y_i - \bar{y})^2 = 0.00673$.

Teste unter Annahme der Normalverteilung auf dem 1%-Niveau, ob sich die beiden Messmethoden systematisch unterscheiden.

4. Zwei Tiefen-Messgeräte messen für die Tiefe einer Gesteins-Schicht an 9 verschiedenen Orten die folgenden Werte:

Messgerät A	120	265	157	187	219	288	156	205	163
Messgerät B	127	281	160	185	220	298	167	203	171
Differenz x_i	-7	-16	-3	2	-1	-10	-11	2	-8

Kennzahlen für die Differenz: $\bar{x}$ beträgt -5.78, die Standardabweichung $s = 6.2$.

Es wird vermutet, dass Gerät B systematisch grössere Werte misst. Bestätigen die Messwerte diese Vermutung oder ist eine zufällige Schwankung als Erklärung plausibel?

a) Handelt es sich um verbundene (gepaarte) oder um unabhängige Stichproben?

b) Führe einen t-Test auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ durch. Formuliere explizit: Modellannahmen, Nullhypothese, Alternative, Teststatistik, Verwerfungsbereich und Testergebnis.

5. Alte Prüfungsaufgabe: Winter 2013
Am kommenden Samstag findet bei der alpinen Ski WM 2013 in Schladming die

Abfahrt der Herren statt. Pro Nation dürfen jeweils 4 Läufer starten. Der Trainer der Schweizer Abfahrtsmannschaft hat bereits 3 Athleten fix nominiert. Für den letzten noch zu vergebenden Startplatz kann er sich nicht zwischen Carlo J. oder Patrick K. entscheiden. In weiser Voraussicht hatte er bereits zu Beginn der Saison angekündigt, dass in solchen Fällen getestet werden soll, ob die bis zur WM erreichten Saisonresultate statistisch signifikant unterschiedlich sind oder nicht. Falls ja, so darf der entsprechende Läufer (für den die Daten sprechen) starten, sonst entscheidet eine faire Münze. Die von den beiden Läufern in den bisherigen 8 Saisonabfahrten erzielten Zeiten (in Minuten:Sekunden) sind dabei wie folgt:

Abfahrt Nr. (i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Carlo (a_i)	1:52.43	2:02.37	1:20.78	1:38.67	2:34.23	1:57.13	1:43.14	1:50.88
Patrick (b_i)	1:53.20	2:03.40	1:20.66	1:39.13	2:33.41	1:58.58	1:42.82	1:51.04

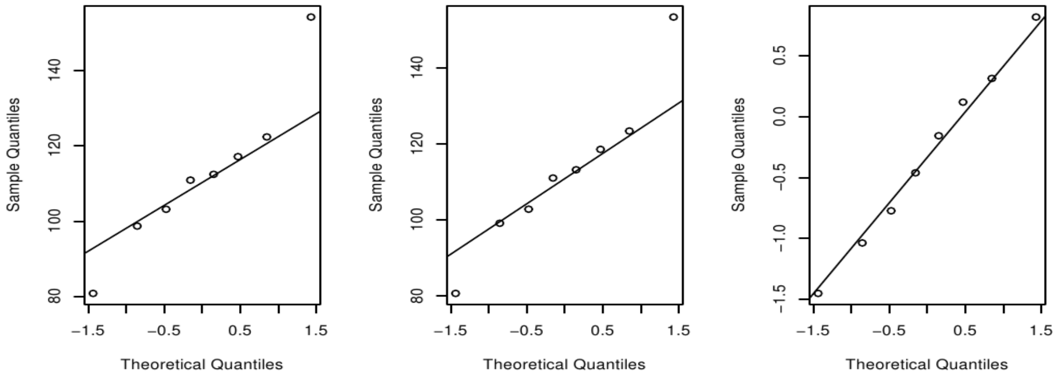
Wenn wir die Stichprobendifferenz mit $d_i := a_i - b_i$ $(i = 1, \ldots, 8)$ bezeichnen, dann ergeben sich daraus die folgenden empirischen Kennwerte (in Sekunden): Mittelwert: $\overline{a}_8 = 112.45$, $\overline{b}_8 = 112.78$, $\overline{d}_8 = -0.33$. Streuung: $s_a = 21.21$, $s_b = 21.1$, $s_d = 0.75$. Gepoolte Streuung von a und b: $s_{pool} = 21.16$.

Es soll nun ein entsprechender Test entwickelt werden um zu prüfen, ob einer der beiden Skifahrer signifikant schneller ist. Und zwar so, dass für jeden einzelnen der beiden Kontrahenten, unter der Annahme er sei gleich schnell wie sein Konkurrent, die Wahrscheinlichkeit dass bereits durch den Test (also ohne dass es zu einem fairen Münzwurf kommt) gegen ihn entschieden wird, maximal 10% beträgt.

a) Ist die Stichprobe gepaart oder ungepaart? Ist der Test ein- oder zweiseitig? Wie lautet das Niveau α? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einem Münzwurf wenn beide Sportler gleich schnell sind?

b) Die folgenden Graphiken sind QQ-Plots der Stichproben $(a_1, \ldots, a_8)$, $(b_1, \ldots, b_8)$ sowie $(d_1, \ldots, d_8)$ (in Sekunden).

Bitte wenden!



Ist die Annahme der Normalverteilung für die für den Test relevanten Daten gerechtfertigt? Geben Sie eine Begründung an. Welcher Test ist daher (unter den üblichen i.i.d. Annahmen) am besten geeignet?

c) Entwickeln Sie den Test, d.h. geben Sie Null- und Alternativhypothese, die Teststatistik sowie den Verwerfungsbereich an.

d) Für welche Werte der Teststatistik würde (ohne dass es zu einem Münzwurf kommt) gegen Carlo entschieden werden?

e) Führen Sie den Test durch. Wie entscheidet der Test? Kommt es zu einem Münzwurf oder nicht?

Abgabe: 16. oder 17. Dezember.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12:00-13:00 Uhr im HG G 32.6.
Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0603-00L/`